3次元 Fano 多様体のモジュライとモジュライ論的記述

名古屋大学大学院
多元数理科学研究科

向井茂

ある代数多様体が何かをパラメータ付けていることは、多様体とパラメータ付けられている対象の双方にとって幸福なことである。ここでは 3次元 Fano 多様体を論じるが、

(1) それらの多くが（代数曲線上の）ベクトル束をパラメータ付けていたり

(2) それらの中の特別なものはアーベル曲面をパラメータ付けている

ことが観察される。前者に関しては拙著[論説97]§§8, 9において曲線の側から説明したが、ここではFano多様体の側からの必然として(1)やその類似が成立することを説明したい。ポイントは

普遍ベクトル束による変換でもって、Fano多様体の幾何がより簡単な多様体上のベクトル束や有理曲線の話に帰着される

ことにある。応用としては、種数9の場合に

Fano多様体の変形(や退化)がより簡単な多様体の変形とその上のベクトル束の変形に分解でき、

他の高種数の場合も似たことのできることがある。

§§1, 2で必要な準備と線型切断定理の復習をした後、§§3, 4でモジュライ論的記述を説明する。講演では時間がなくて省略したが、線型切断定理とモジュライ論的記述の間にはある種の双対性が観察される。最終節ではこれに関して述べる。

多くの事実の発見や証明はK3曲面上のベクトル束によってなされるが，これについては触れられなかった。

なお，(2)の方はレベルの小さいモジュラー曲線が$\mathbb{P}^1$になったり，判別式の小さいHilbertモジュラー曲面が有理的であることを3次元に拡張する試みである。これに関しては拙著[論説95]§8と[北大]を参照されたい。

記号と用語 固定されたn次元ベクトル空間の中のr次元部分空間全体のなすGrassmann多様体を$G(r, n)$で表す。曲線とは完備代数曲線のことで，特に断わらなければ非特異とする。殆んどのことが一般の標数零の体上でできる。そのことがベクトル束法の利点の1つであるが，記述の煩と読みづらさを避けるために全て複素数体$\mathbb{C}$上で考える。部分多様体$X \subset Y$は，Y上のベクトル束Eの大域切断の零スキームと一致し，余次元がEの階数に等しいとき，Yの中でEに関して完全交叉であると言う。

§1 準備

3次元 Fano 多様体（の反標準モデル）$X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ の研究は G. Fano (1871-1952) が直線からの2重射影

$$X_{2g-2} \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-6}$$

を使って種数 $g \geq 10$ のものの有理性を示したことに始まる。以下で述べる結果は Fano 多様体上の直線という部分多様体の替りにその上のベクトル束を使う点で Fano 自身やそれを引き継ぎ発展させた Iskovskih, Shokurov, 森 等の結果と異なる。ベクトル束の方法には以下で見るように2種あるが，どちらも Fano 多様体のカノニカルな表示を与えるので，これによってそれらの変形や退化を精密に調べることができる。

以下では Picard 数が1で Fano 指数が1の非特異3次元 Fano 多様体を考察する。言換えると，反標準直線束

$$\mathcal{O}_X(-K_X) := \bigwedge^3 T_X$$

が豊富で Picard群を生成している射影的代数多様体である。これを単に3次元Fano多様体と呼ぶことにする。(2次元以下では $\mathrm{Pic}\,X \cong \mathbb{Z}(-K_X)$ なる多様体は存在しない。)

Riemann-Roch型定理や小平の消滅定理などにより

$$\dim H^0(\mathcal{O}_X(-K_X)) = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 3$$

が成立する。これに現われる自己交点数の替りに種数

$$g := \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1$$

でもって3次元Fano多様体 X の"大きさ"を計ることにする。別の重要な離散的不変量として

$$p := \dim H^1(X, \Omega^2)$$

がある。これは X の第3 Betti数の半分であり，中間次元Jacobi多様体の次元に等しい。以下では Hodge数と呼ぶ。3次元Fano多様体の変形同値類は丁度10個で，それらの不変量 g と p は次の通りである。

表1

g	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
p	52	30	20	14	10	7	5	3	2	0

これらのうち種数が5以下のものは次のように荷重射影空間内で超曲面の完全交叉になっている。

表2

g	2	3	4	5
X	$(6) \subset \mathbb{P}(1^4 3)$	$(4) \subset \mathbb{P}^4$ $(2) \cap (4) \subset \mathbb{P}(1^5 2)$	$(2) \cap (3) \subset \mathbb{P}^5$	$(2) \cap (2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^6$

反標準線型系 $|-K_X|$ の中には非特異K3曲面が存在する([Sho])。この上の rigid ベクトル束を X 上のベクトル束に拡張し、これによって Grassmann 埋込みをすることによって次の結果を得る。

$\boxed{\text{線型切断定理}}$ X は種数 g が7以上の3次元

Fano多様体とする。このとき、Grassmann多様体 $\mathcal{X}_g$ とその上の等質ベクトル束 $\mathcal{E}_g$、そして、$\mathcal{E}_g$ に関して完全交叉になっている $(p+3)$ 次元部分多様体 $\Sigma_{2g-2} \subset \mathcal{X}_g$ が存在して、X は $\Sigma_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+p+1}$（自然な埋込み）を p 回横断的に超平面切断したものと同型である。

§2 線型切断定理

しばらくは種数 9 の 3 次元 Fano 多様体 X に対して線型切断定理を復習しよう。

$\boxed{\text{命題}}$ X の上には階数 3 の安定ベクトル束 A であって，次をみたすものが同型を除いて唯一つ存在する。

1) $\det A \cong \mathcal{O}_X(-K_X)$

2) $h^0(A) = 6$

3) A は大域切断でもって生成される。

コホモロジー群 $H^1(A \otimes A^*)$ が消えているので，変形が全くない。そこで，これを rigid 束と呼ぶ。
この階数 3 のベクトル束 A とその 6 個の大域切断より 9 次元 Grassmann 多様体への射

$$\Phi_A : X \longrightarrow G(3,6)$$

がえられる。

$\boxed{\text{命題}}$ (1) Φ_A は埋込みである。（以下，Φ_A でもって X とその像を同一視する。）

(2) X は Lagrangian Grassmann 多様体 $G(3,6,\sigma)$ に含まれる。ただし, σ は 6次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^6$ (正確には $H^0(A)$ の双対) の上の非退化歪対称双線型形式で, $G(3,6,\sigma)$ は $\mathbb{C}^6$ の中の 3次元部分空間 U で $\sigma|_{U\times U} \equiv 0$ なるもの全体のなす $G(3,6)$ の部分多様体である。

$G(3,6,\sigma)$ はシンプレクティック群 $Sp(3)$ の作用する6次元等質空間である。9次元 Grassmann 多様体 $G(3,6)$ は Plücker 座標でもって

$$\mathbb{P}^{19} = \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^3 \mathbb{C}^6)$$

に埋め込まれているが, $G(3,6,\sigma)$ はその中で13次元の射影空間を張っている。これは $Sp(3)$ の 14次元既約表現 U^{14} の射影化になっている。

<u>線型切断定理</u>($g=9$) 3次元 Fano 多様体 X は 6次元 Lagrangian Grassmann 多様体 $G(3,6,\sigma) \subset \mathbb{P}^{13}$ とそれに横断的な余次元 3 $(=p)$ の部分線型空間 P との交わりに同型である。

$\mathcal{F}$ を Grassmann 多様体 $G(3,6)$ 上の普遍部分束の双対としよう。埋込の構成より、$\mathcal{F}$ の X への制限は rigid 束 A と同型である。また、$G(3,6,\sigma)$ は $G(3,6)$ の中で等質ベクトル束

$$\bigwedge^2 \mathcal{F}$$

に関して完全交叉になっている。よって §1 での記号との関係は

$$\mathcal{X}_9 = G(3,6), \quad \mathcal{E}_9 = \bigwedge^2 \mathcal{F}, \quad \Sigma_{16} = G(3,6,\sigma)$$

である。

また、上の記述 $X \cong G(3,6,\sigma) \cap P$ は一意的である。即ち、$X \cong G(3,6,\sigma) \cap P'$ なる線型部分空間は $Sp(3)$ の作用でもって P と移り合う。よって、X のモジュライ空間は軌道空間の中の開部分集合である。

$$\left\{ \begin{matrix} \text{種数 } 9 \text{ の非特異} \\ 3\text{次元 Fano 多様体} \end{matrix} \right\} \Big/ \text{同型} \xhookrightarrow[\text{開}]{} G(3, U^{14}) \big/ Sp(3)$$

$3(14-3)-21=12$ 次元

他の種数も同様である。

表3

種数 g	7	8	9	10	12
Hodge数 p	7	5	3	2	0
Grassmann多様体 $\mathfrak{X}_g$	$G(5,10)$	$G(2,6)$	$G(3,6)$	$G(5,7)$	$G(3,7)$
等質ベクトル束 $\mathcal{E}_g$	$S^2\mathcal{F}$	0	$\overset{2}{\wedge}\mathcal{F}$	$\overset{4}{\wedge}\mathcal{F}$	$3\overset{2}{\wedge}\mathcal{F}$
モジュライ	$G(7,U^{16})/SO(10)$	$G(5,\overset{2}{\wedge}\mathbb{C}^6)/PGL(6)$	$G(3,U^{14})/Sp(3)$	$G(2,\mathfrak{g})/G_2$	$G(3,\overset{3}{\wedge}\mathbb{C}^7)/PGL(7)$
モジュライ数	18	15	12	10	6

ただし、$\mathcal{F}$ は Grassmann 多様体 $G(r, n)$ 上の普遍部分ベクトル束の双対（よって階数は r）である。U^{16} は 10次スピノル群の16次元半スピン表現を表わす。また、G_2 は G_2 型の例外型半単純代数群で、$\mathfrak{g}$ はその Lie 環（への随伴表現）である。

$\boxed{\text{注}}$ Grassmann 多様体 $\mathcal{X}_g$ の次元は種数7以外のときは g に等しく、$\mathcal{X}_7$ の次元は $4 \times 7 - 3 = 25$ である。

§3 モジュライ論的記述（種数9）

前節と同様、種数9の3次元Fano多様体Xに対して説明しよう。 前節の主役は（階数3の）rigidベクトル束Aであったが、モジュライ論的記述では$H^1(B\otimes B^*)\neq 0$の次元が出来るだけ小さいベクトル束Bを使う。 種数9では次のものが見つかる。

$\boxed{\text{命題}}$ Fano多様体Xの上には階数2の安定ベクトル束Bでもって次をみたすものが存在する。

1) $\det B \cong \mathcal{O}_X(-K_X)$

2) $\chi(B) = 6$

3) Bの（変形の）モジュライ空間は非特異平面4次曲線 $C\subset \mathbb{P}^2$ と同型である。

モジュライ数が1なので、semi-rigid束と呼ぶことにする。

$\boxed{\text{注}}$ 上の4次曲線Cは線型切断定理における記述

$$X = G(3,6,\sigma)\cap P\ ,\quad \dim P = 10$$

から次のようにして得られる。Lagrangian Grassmann 多様体 $G(3,6,\sigma) \subset \mathbb{P}^{13}$ の射影的双対は $\check{\mathbb{P}}^{13}$ 内の4次超曲面である。X を切り出す10次元部分空間 $P \subset \mathbb{P}^{13}$ は双対空間内の平面 $P^{\perp} \subset \check{\mathbb{P}}^{13}$ を定める。命題の4次曲線は上の4次超曲面とこの $P^{\perp}$ の交わりである。

$\{B_t\}_{t \in C}$ を命題の semi-rigid 束の完備族としよう。これに対しては普遍ベクトル束が存在する。即ち，直積 $X \times C$ 上の階数2のベクトル束 $\mathcal{B}$ であって，各 $t \in C$ に対して

$$\mathcal{B}|_{X \times t} \cong B_t$$

となるものが存在する。モジュライ論的記述をえるためのアイデアはこのベクトル束 $\mathcal{B}$ を核とする次の関手を考えることにある。

Fano 多様体 X 上の（連接）層 M に対して曲線 C 上の層

$$\pi_{C,*}(\mathcal{B} \otimes \pi_X^* M)$$

を対応させる関手

$$(\mathrm{Coh}\ X) \longrightarrow (\mathrm{Coh}\ C)$$

を φ で表わそう。

$\boxed{\text{例}}$ M が点 $x \in X$ に台をもつ1次元摩天楼層 (sky-scraper sheaf) $k(x)$ のときが最も簡単である。$\varphi(k(x))$ は普遍ベクトル束 $\mathcal{B}$ の逆ファイバー $x \times C$ への制限で，曲線 C 上の階数2のベクトル束である。これを B^x で表わす。

前節の手段であった rigid 束 A の双対の φ による変換を考えよう。説明は略すが，全ての $t \in C$ に対して

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(A, B_t) = 2$$

が成立する。よって，順像 (direct image) に関する底変換定理 (Base change theorem) により，$\varphi(A^*)$ は C 上の階数2のベクトル束である。これを F で表そう。

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(A^*, k(x)) = 3\ (= \mathrm{rk}\, A)$$

と自然な線型写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(A^*, k(x)) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(F, B^x)$$

より，次の期待を抱く。

☆ $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(F, B^x) \geq 3$ が全ての $x \in X$ に対して成立するのではないだろうか？ さらに欲張って、曲線 C 上のベクトル束の族 $\{B^x\}_{x \in X}$ はこの条件で特徴付けられるのではないか？

この厚かましい期待が実現してくれる。

$\boxed{\text{定理}}$ Fano 多様体 X と曲線 C，そして，C 上のベクトル束 $F = \Phi(A^\vee)$ は上の通りとする。このとき，X は C 上のベクトル束の Brill-Noether 軌跡

対応 $x \longmapsto B^x$ でもって

$$\mathcal{SU}_C(2, K : 3F) := \left\{ [E] \;\middle|\; \begin{array}{l} E \text{ は階数 } 2 \text{ で安定} \\ \det E = \det F \otimes \mathcal{O}_C(K) \\ \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(F, E) \geq 3 \end{array} \right\} \Big/ \text{同型}$$

と同型である。（[論説97]では II 型の B-N 軌跡と呼んでいる。） また，F の次数は奇数である。（E も同様。）

普遍ベクトル束 $\mathcal{B}$ は C 上の直線束 ξ のテンソル積を除いて一意的に定まる。$\mathcal{B}$ の替りに $\mathcal{B} \otimes \pi_C^* \xi$

を普遍束にとると、 F は $F\otimes\xi$ に替る。しかし、

$$E \in SU_C(2, K:3F) \Leftrightarrow E\otimes\xi \in SU_C(2, K:3F\otimes\xi)$$

であるから、上の定理は $\mathcal{B}$ のとり方によっていない。

また、$\mathcal{B}$ のとり方は一意的ではないが、F を射影化した $\mathbb{P}^1$ 束 $\mathbb{P}(F)$ は X より一意に定まる。よって、定理は、逆にこの $\mathbb{P}^1$ 束より Fano 多様体 X が復元されると主張していると考えてもよい。

奇数次数の階数2のベクトル束が全て F として現われるわけでは無い。この状況に関して定理の続きを述べるために言葉を準備しよう。C は種数 g の（非特異代数）曲線とし、F はその上の階数2のベクトル束とする。よく知られているように、全ての部分直線束 $\xi \subset F$ に対して

$$\deg \xi < \frac{1}{2}\deg F$$

が成立するとき、ベクトル束 F は安定であると言う。これは $\mathbb{P}^1$ 束 $\mathbb{P}(F)$ に対して述べると、全ての切断 $S \subset \mathbb{P}(F)$ が正の自己交点数をもつこと、$(S^2) > 0$、と同値である。

$\boxed{\text{定義}}$ 種数 g の曲線上の階数2のベクトル束

F は全ての切断 $S \subset \mathbb{P}(F)$ に対して

$$(S^2) \geqq g$$

が成立するとき，永田安定であると言う。

もとの設定に戻ろう。

$\boxed{\text{定理}}$ (続) C は種数 3 の曲線で F はその上の階数 2 のベクトル束とする。このとき，次は同値である。

(1) Brill-Noether 軌跡 $\mathcal{SU}_C(2, K : 3F)$ は非特異 3 次元多様体である。(自動的に種数 9 の Fano になる。)

(2) C は超楕円的でなく（平面 4 次曲線と言っても同じ），F は永田安定である。

以上により，Fano 多様体と線織面 (ruled surface) の間の次の全単射がえられる。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{種数 9 の非特異}\\ \text{3次元 Fano 多様体}\end{array}\right\}\Big/\text{同型} \rightleftarrows \left\{\begin{array}{l}\text{永田安定で奇な4次}\\ \text{曲線上の線織面}\end{array}\right\}\Big/\text{同型}$$

$$X \longmapsto \mathbb{P}(F),\quad F = \pi_{C,*}(\mathcal{B} \otimes \pi_X^* A^*)$$

$$\mathcal{SU}_C(2, K:3F) \longleftarrow \mathbb{P}(F)$$

さらに付け加えると，$\mathcal{SU}_C(2, K:3F)$ の中間次元Jacobi多様体は（主偏極アーベル多様体として）曲線 C の Jacobi 多様体と同型である。よって，周期写像

$$\left\{\begin{array}{l}\text{種数 9 の非特異}\\ \text{3次元 Fano 多様体}\end{array}\right\}\Big/\text{同型} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{3次元主偏極}\\ \text{アーベル多様体}\end{array}\right\}\Big/\text{同型}$$

の $[\mathrm{Jac}\ C]$ 上のファイバーは C 上の永田安定な $\mathbb{P}^1$ 束のモジュライ空間と同型である。安定で奇な $\mathbb{P}^1$ 束のモジュライはコンパクトであるが，永田安定でないものの全体はその中で余次元1の部分多様体をなしている。よって，この周期写像のファイバー（6次元）はコンパクトではない。（アフィン代数多様体になっている。）

§4 モジュライ論的記述（種数 10, 7, 12, 8）

種数 10 の 3 次元 Fano 多様体 X の上には階数 2 で $\det A \cong \mathcal{O}_X(-K_X)$ なる rigid 安定ベクトル束 A が存在し，これでもって X は 10 次元 Grassmann 多様体 $(\mathcal{K}_{10} = G(5,7))$ に埋め込まれる。そして，その中で等質ベクトル束に関して完全交叉になっている 5 次元部分多様体 $\Sigma_{10} \subset \mathbb{P}^{13}$ の線型切断と同型である。また，階数 3 の semi-rigid 束が存在し，それらのモジュライ空間 C は種数 2 の曲線になる。種数 9 のときと同様に，A を普遍ベクトル束を核とする関手で変換することによって C 上の階数 3 のベクトル束がえられる。これを F で書そう。

$\boxed{\text{予想}}$ 種数 10 の 3 次元 Fano 多様体は曲線 C 上の階数 3 ベクトル束に対する Brill-Noether 軌跡

$$\mathcal{SU}_C(3, K : 3F) := \left\{ [E] \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{rk} E = 3,\ E \text{ は安定} \\ \det E \cong \det F \otimes \mathcal{O}_C(K) \\ \dim \operatorname{Hom}(F, E) \geq 2 \end{array} \right\} \Big/ \text{同型}$$

と同型であろう。

これは種数9の場合と違ってまだ証明できていない。

種数7の3次元Fano多様体 X の上には階数5，$\det A \cong \mathcal{O}_X(-2K_X)$ なる安定rigidベクトル束 A が存在する。そして，この A でもって X は10次元スピノル多様体 $\underbrace{\Sigma_{12} \subset G(5,10)}_{=\mathcal{X}_7}$ に埋込まれ，それの線型切断になっている。一方，X の上には階数2のsemi-rigid安定ベクトル束が存在し，それらのモジュライ空間 C は種数7の曲線である。このsemi-rigid束の完備1次元族を $\{B_t\}_{t \in C}$，直積 $X \times C$ 上の普遍ベクトル束を $\mathcal{B}$ とする。また，逆ファイバー $x \times C$ への制限を $\mathcal{B}^x$ で表そう。全ての $t \in C$ に対して

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(A, B_t) = 1$$

が示せる。よって，

$$\pi_{C,*}(\mathcal{B} \otimes \pi_X^* A^*)$$

は曲線 C 上の直線束である。$\mathcal{B}$ とこの直線束

の逆でねじったものに置き換えよう。新しい普遍ベクトル束 $\mathcal{B}$ に対しては上の順像は自明直線束となる。簡単な計算より、$\bigwedge^2 \mathcal{B}^x$ は C の標準直線束と同型になることがわかる。

$\boxed{\text{定理}}$ 種数 7 の非特異3次元 Fano 多様体は、対応

$$x \longmapsto \mathcal{B}^x$$

でもって階数 2 のベクトル束に対する Brill-Noether 軌跡

$$SU_C(2, K : 5\mathcal{O}_C) := \left\{ [E] \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{rk}\, E = 2,\ E\text{は安定} \\ \det E \cong \mathcal{O}_C(K) \\ \dim H^0(E) \geq 5 \end{array} \right\} \Big/ \text{同型}$$

と同型である。

種数 9 のときと同様、大域切断の個数の指定に現われる 5 は rigid ベクトル束 A の階数である。

種数 12 の場合は階数 3 の rigid 安定ベクトル束でもって 12 次元 Grassmann 多様体に埋め

込まれ，Fano 多様体は階数 9 の等質ベクトル $3\bigwedge^2 \mathcal{F}$ に関して完全交叉になっている。（この場合は $p=0$ なので線型切断をとる必要がない。）

X 上にはより semi-rigid 束が見つからないが，その替りに X 上には階数 2 の rigid 束も存在し，2つの rigid 束の関わり合いから，X のモジュライ論的記述がえられる（[PNAS]）。

種数 8 の 3次元 Fano 多様体 X は 8次元 Grassmann 多様体

$$G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$$

と余次元 5 $(=p)$ の線型部分空間 $P \cong \mathbb{P}^9$ との横断的な交わりである。$G(2,6)$ の射影的双対は Pfaff 多項式で定義される $\check{\mathbb{P}}^{14}$ 内の 3次超曲面で，P の定める 4次元部分空間 $P^\perp \subset \check{\mathbb{P}}^{14}$ との交わりとして 3次元 3次超曲面がえられる。これを $Y \subset \mathbb{P}^4$ とするとき，Y は X と双有理同値である。$Y \subset \mathbb{P}^4$ 上の 4次有理曲線の Hilbert 概型を $\mathcal{Y}$ として

Abel-Jacobi 写像を

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \longrightarrow & \text{Int-Jac}\,Y \\ (8\text{次元}) & & (5\text{次元}) \end{array}$$

としよう。このとき，一般の X はこの射のファイバーと同型である。

§5 2つの記述の間のある双対性

$\boxed{\text{観察}}$ 高種数8次元 Fano 多様体の第1記述に現われる Grassmann 多様体 $\mathcal{X}$ はモジュライ論的記述における外部空間 $\hat{\mathcal{X}}$ と同次元である。

表4

種数 g	$\mathcal{X}_g$	次元	モジュライ空間 $\hat{\mathcal{X}}_g$
7	$G(5,10)$	$25=18+7$	$\mathcal{U}_C(2)$, Cは種数7
8	$G(2,6)$	$8=3+5$	3次元3次超曲面 Y 上の4次有理曲線の Hilbert 概型
9	$G(3,6)$	$9=6+3$	$\mathcal{U}_C(2)$, Cは種数3
10	$G(5,7)$	$10=8+2$	$\mathcal{U}_C(3)$, Cは種数2
12	$G(3,7)$	$12=12+0$	$\mathbb{P}^3$内の3次有理曲線の Hilbert 概型

ただし, $\mathcal{U}_C(r)$ は曲線 C 上の階数 r の安定ベクトル束のモジュライ空間である。次元は

$$r^2 g - r^2 + 1$$

に等しい。(この中に Brill-Noether 軌跡が住む。)

この観察をより精密にすることができる。3次元Fano多様体 X の Grassmann 多様体 $\mathcal{H}_g$ における法線ベクトル束 $N_{X/\mathcal{H}}$ を計算しよう。X は Σ_{2g-2} を p 個超平面切断したものであるから、完全列

$$(**)\quad 0 \longrightarrow p\,\mathcal{O}_X(-K_X) \longrightarrow N_{X/\mathcal{H}} \longrightarrow N_{\Sigma/\mathcal{H}}|_X \longrightarrow 0$$

を得る。法線ベクトル束 $N_{\Sigma/\mathcal{H}}$ は表3のベクトル束 $\mathcal{E}_g$ の Σ_{2g-2} への制限と同型である。予の X への制限は rigid ベクトル束 A に外ならないから次を得る。

g	7	8	9	10	12
$N_{\Sigma/\mathcal{H}}\|_X$	S^2A	0	$\bigwedge^2 A$	$\bigwedge^4 A$	$3\bigwedge^2 A$

$\boxed{\text{観察}}$（精密化） 高種数3次元Fano多様体 X のモジュライ空間 $\hat{\mathcal{H}}_g$ 内における法線ベクトル束 $N_{X/\hat{\mathcal{H}}}$ は Grassmann 多様体 $\mathcal{H}_g$ におけるそれと次の関係にある。
(twisted dual)

$$\mathcal{N}_{X/\hat{\mathcal{H}}} \cong \left(\mathcal{N}_{X/\mathcal{H}}\right)^* \otimes \mathcal{O}_X(-K_X)$$

また，(☆☆)の導く完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}^*_{\Sigma/\mathcal{H}}\big|_X \otimes \mathcal{O}_X(-K_X) \to \mathcal{N}^*_{X/\mathcal{H}} \otimes \mathcal{O}_X(-K_X)$$

$$\longrightarrow p\,\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

は，X が $\hat{\mathcal{H}}_g$ の Albanese 射

$$\hat{\mathcal{H}}_g \longrightarrow \text{Int-Jac}\, X = \begin{cases} \text{Jac}\, C & g = 7, 9, 10 \\ \text{Int-Jac (cubic 3-fold)} & g = 8 \\ 1\text{点} & g = 12 \end{cases}$$

のファイバーに入っていることから導かれるものと一致する。

参考文献

[PNAS] Mukai, S.: Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex 3, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 86 (1989), 3000-3002.

[論説95] 向井茂, Fano多様体論の新展開, 数学 47巻(1995), 125-144.

[論説97] ————, Brill-Noether理論の非可換化と3次元Fano多様体, 数学 49巻(1997), 1-24.

[北大] ————, Moduli of abelian surfaces, and regular polyhedral groups, 「代数多様体のモジュライ, 北大, 1999年1月」報告集。

[Nag] Nagata, M.: On self-intersection number of a section on a ruled surface, Nagoya Math. J., 37(1970), 191-196.

[Sho] Shokurov, V.V.: Smoothness of the general anticanonical divisor on a Fano 3-fold, Math. USSR Izv., 14(1980), 395-405.